

LAS OPERACIONES SUMA Y RESTA

Documento obtenido de www.uco.es/grupos/intemat/aula/educa/primaria/.../SumayResta.doc

Universidad de Córdoba. Desconozco el autor.

1. Significado

Con los números no sólo se simbolizan cantidades, también las acciones, relaciones y transformaciones cuantitativas que pueden realizarse sobre los objetos tienen un reflejo en operaciones numéricas.

El número es un concepto esencialmente operatorio. El número expresa simbólicamente determinadas características del mundo real, en particular la cantidad, el orden, la medida. Pero sobre los objetos reales se pueden efectuar acciones básicas, intrínsecamente relacionadas con el número: comparar, igualar, determinar las veces que uno abarca a otro, agregar, separar, reiterar, repartir, etc. Estas acciones inducen operaciones matemáticas.

Las acciones que dan lugar a la **suma** y a la **resta** (agregar / desagregar, reunir / separar, aumentar / disminuir) son elementales y se trabajan en simultaneidad con las ideas que dan lugar al concepto de número.

Por ello, el estudio de la adición y sustracción debe realizarse en simultaneidad con el trabajo sobre los números, de modo integrado. Cada número debe aparecer como un sistema integrado de relaciones y no como algo puramente estático. Así, conocer 5 es saber que $5 = 4 + 1$, $5 = 3 + 2$, $5 = 9 - 4$, etc.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, la suma de números naturales se suele definir a partir de la unión de conjuntos. Dados dos conjuntos disjuntos A y B cuyos cardinales son a y b, respectivamente, se define la suma de éstos últimos como el cardinal del conjunto unión de A y B:

$$a + b = n(A \cup B)$$

También se puede definir de modo axiomático, siguiendo el sistema de Peano.

La resta puede considerarse como una operación asociada a la suma, puesto que obtener la resta entre dos números a y b es obtener un tercero, c , tal que $b + c = a$.

2. Contextos

El análisis de los problemas de adición y sustracción ha permitido identificar tres tipos de situaciones básicas inductoras de dichas operaciones: *combinación*, *cambio* (une y separa), y *comparación*.

Las situaciones de *combinación* implican relación estática entre conjuntos. Hacen preguntarse por el conjunto unión o por uno de los dos subconjuntos disjuntos. Por ejemplo: “Hay 3 chicos y 4 chicas. ¿Cuántos niños hay en total?”. O, como problema de resta: “Hay 7 niños en total, de los cuales 3 son chicos. ¿Cuántas chicas hay?”

Las situaciones de *cambio* describen el aumento o la disminución en algún estado inicial para producir un estado final. Por ejemplo, “Juan tiene 6 cromos. Ganó (perdió) 2 de ellos. ¿Cuántos cromos tiene ahora?”

Las situaciones de *comparación* inducen comparación estática entre dos conjuntos, preguntando acerca del conjunto diferencia o acerca de uno de los conjuntos sobre los que actúa el conjunto diferencia. Por ejemplo: “Tomás tiene 6 cromos. Juan tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Tomás más que Juan?”.

Las situaciones de combinación responden a una interpretación de la suma como unión de conjuntos. Dados dos conjuntos disjuntos A y B cuyos cardinales son a y b , respectivamente, se define la suma de éstos últimos como el cardinal del conjunto unión de A y B :

$$a + b = n(A \cup B)$$

En esta interpretación, la suma aparece, desde el punto de vista formal, como una operación binaria, una aplicación del conjunto producto $N \times N$ (conjunto de todas las parejas de números naturales) sobre N . Una aplicación, por ejemplo, del par $(4,5)$ en el número 9. En esta interpretación, la operación considera a los números que forman el par inicial simultáneamente y ejerciendo el mismo papel.

Las situaciones de cambio expresan una interpretación de la suma ligada al orden (como la definición de Peano). Sumar 2 a 4 representa avanzar desde 4, dos posiciones en la recta numérica.

Las situaciones de comparación representan una interpretación de la suma también ligada al orden, que induce la aparición de la resta. Saber cuántos cromos más tiene Tomás que Juan equivale a determinar cuántos tengo que sumar a los de Juan para obtener a los de Tomás (sumar 2 a 4 para obtener 6; ó avanzar 2 desde 4 en la recta numérica para alcanzar el 6) y se traduce en obtener la diferencia entre los cromos de Tomás y Juan.

Estas dos interpretaciones últimas no consideran a los números de partida de forma simultánea y además les asignan dos papeles diferentes: una es la cantidad inicial dada y la otra es una cantidad que viene a transformar la inicial en el resultado final. En esta interpretación, la operación tiene un carácter unitario, es una aplicación de N en N . Por ejemplo, la suma

$$4 + 5 = 9$$

se interpreta como expresión de una aplicación de factor de transformación (+5):

$$\begin{array}{l} +5 \\ N \rightarrow N \\ 4 \rightarrow 9 \end{array}$$

que transforma cualquier número natural en otro mayor en cinco unidades.

La suma, considerada como operación unitaria, es una aplicación (que se puede simbolizar por $(+ k)$ entre N y N . A todo número natural a le corresponde el número natural $a + k$.

Las dos interpretaciones de la suma como operación binaria y como operación unitaria no sólo son diferentes formalmente sino que reflejan las dos interpretaciones didácticas de suma dadas con anterioridad,

La suma como operación binaria insiste más en la idea de unas relaciones estáticas entre ambos sumandos que permanecen inalterados hasta que se efectúa la operación. La suma como operación unitaria responde a una idea más dinámica por cuanto uno de los sumandos representa la herramienta necesaria para transformar el otro sumando.

La consideración de la suma sea como operación binaria o como operación unitaria tiene al menos dos repercusiones en cuanto a sus características formales.

A) La conmutatividad en ambos casos es diferente. Si la suma es considerada como operación binaria la propiedad conmutativa es evidente ya que

$$a + b = b + a,$$

pues $n(A \cup B) = n(B \cup A)$

Al cumplir ambos sumandos un papel equivalente la transposición de ambos sumandos no repercute ni en el resultado ni en el procedimiento.

Sin embargo, si la suma es considerada como operación unitaria, los papeles de ambos sumandos difieren y la expresión clásica de la conmutatividad, $a + b = b + a$, da el mismo resultado pero obedece, en los dos miembros de la igualdad, a procedimientos diferentes.

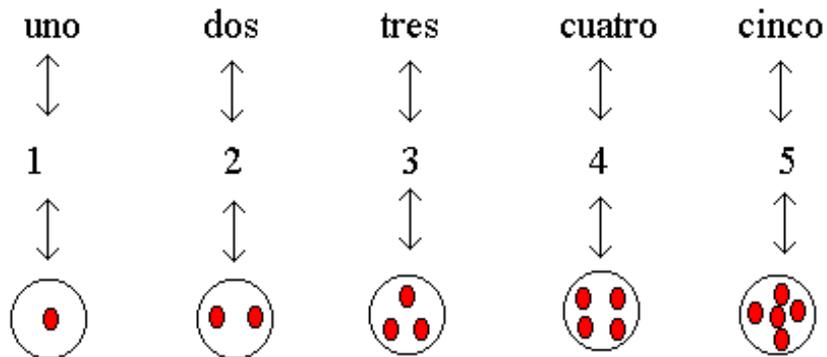
En el primero, $+ b(a)$, el sumando b tiene el papel de herramienta o como usualmente se denomina, “operador”. En el segundo, $+ a(b)$, el sumando b ha pasado a ocupar el papel del sumando “operado”. Inversamente, el papel del sumando a también cambia. Por ello y aunque el resultado sea el mismo la operación efectuada en los dos miembros es distinta.

3. Modelos mentales

Son muchos los modelos mentales posibles que se pueden considerar para trabajar con las operaciones de adición y sustracción. Los más usuales para trabajar estas operaciones son: los modelos lineales, los modelos cardinales, modelos con medidas y modelos funcionales.

Modelos lineales

La serie numérica es un esquema mental que integra la sucesión de términos que sirven para contar, y que a su vez expresan el cardinal. Se suele utilizar en los primeros niveles escolares para realizar operaciones o para comparar cantidades directamente.

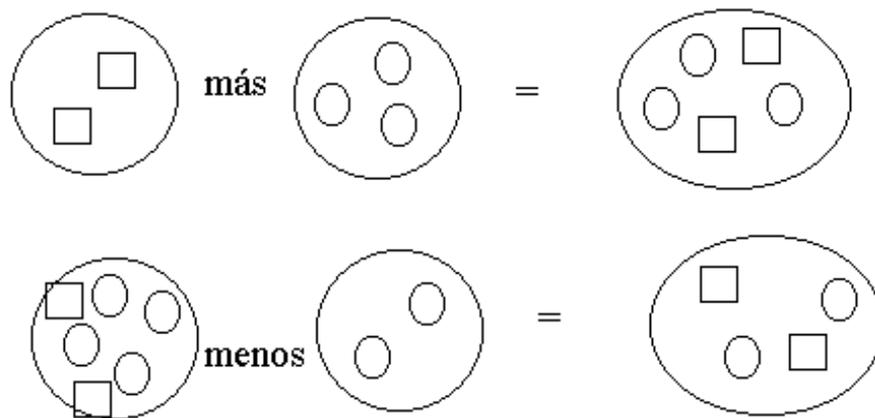


Es un modelo que integra los contextos numéricos de cardinal, secuencia y ordinal.

En este modelo, la suma aparece relacionada con las acciones de agregar y de avanzar un determinado número de pasos en la serie numérica. La resta, con la de desagregar y retroceder en la serie numérica.

Modelos cardinales

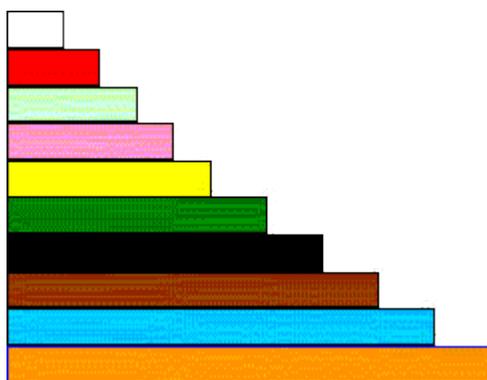
En ellos se incluyen los diagramas de la teoría de conjuntos. Implica: inclusión de conjuntos, unión y sustracción de conjuntos, conjunto complementario, etc. Estos modelos se utilizan tanto para la adición como para la sustracción.



Este esquema es muy abstracto y su dominio supone una fase importante en la consolidación de ambas operaciones

Modelos con medidas

Destacan los modelos longitudinales como las regletas de Cuisenaire o los modelos sobre otras magnitudes, como la balanza.



Modelo funcional

También llamado operatorio. En este modelo se supone que la operación es una máquina que transforma números en otros números, mediante una ley determinada.

La operación $2 + 5 = 7$ se esquematiza:

